# Λ Υ Σ Ε Ι Σ

## ΘΕΜΑ Α

| Α1 | Α2 | Α3 | Α4 | Α5i | Α5ii | Α5iii | Α5iv | Α5v |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **γ** | **β** | **γ** | **γ** | **Σ** | **Σ** | **Λ** | **Σ** | **Λ** |

**Α1.γ**

Από το διάγραμμα της ορμής βλέπουμε ότι είναι της μορφής p= $-p_{max}$ημωt. Λόγω του τύπου p= mυ, καταλαβαίνουμε ότι και η ταχύτητα θα είναι της μορφής υ= $-υ_{max}$ημωt= $υ_{max}$συν(ωt+π/2). Άρα η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $φ_0$= π/2 rad και τελικά η απομάκρυνση θα είναι της μορφής: x= Αημ(ωt+π/2) ⇒x= Ασυνωt.

**Α2.β**

Τη χρονική στιγμή $t_1$= 3Τ/4 το σώμα βρίσκεται στη θέση x= -A. Την χρονική στιγμή $t_2$= 5Τ/2, δηλαδή μετά από Δt= $t_2$-$t_1$= 5Τ/2-3Τ/4= 7Τ/4 το σώμα θα έχει διανύσει 7Α, αφού σε κάθε Τ/4 διανύει Α. Αυτό ισχύει εφόσον το σώμα ξεκινάει από μια από τις 3 «βασικές» θέσεις της ταλάντωσης: x= 0, +A, -A.

**Α3.γ**

Η ενέργεια που προσφέρεται σε έναν ακίνητο ταλαντωτή θα γίνει ενέργεια ταλάντωσης. Επομένως:

$$E=\frac{1}{2}DA^2=\frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A=\sqrt{\frac{2E}{k}}$$

**Α4.γ**

Αφού την $t_0$= 0 το σώμα έχει μέγιστη θετική επιτάχυνση, θα βρίσκεται στην αριστερή ακραία του θέση (x= -A). Για να αποκτήσει μέγιστη κινητική ενέργεια θα πρέπει να έχει μέγιστη, κατά μέτρο, ταχύτητα. Δηλαδή θα πρέπει να βρεθεί στη θέση ισορροπίας του. Αυτό θα συμβεί τη χρονική στιγμή 7Τ/4 γιατί:

7Τ/4= 4Τ/4 + 3Τ/4= Τ + 3Τ/4

Άρα θα έχει κάνει μια πλήρη ταλάντωση και επιπλέον θα έχει διανύσει 3Α, ένα για κάθε υπολειπόμενο Τ/4. Έτσι θα έχει βρεθεί στη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα αριστερά.

Φυσικά, η χρονική στιγμή 7Τ/4 δεν θα είναι η πρώτη φορά που το σώμα θα αποκτήσει μέγιστη κινητική ενέργεια. Οι στιγμές μετά την $t_0$= 0 που θα συμβεί αυτό θα είναι: Τ/4, Τ/4+Τ/2, Τ/4+2Τ/2, Τ/4+3Τ/2, …

**Α5i.Σ**

Σύμφωνα με τον ορισμό της σταθεράς επαναφοράς D= mω$^2$, προκύπτει ο τύπος $\omega=\sqrt{D/m}$.

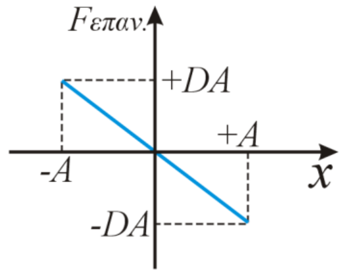
**Α5ii.Σ**

Από τον τύπο ΣF= -Dx η σταθερά επαναφοράς στο S.I. έχει μονάδες N/m. Όμως, σύμφωνα με τον τύπο ΣF=ma το 1 N ορίζεται ως 1 N= 1 kg.m/s$^2$. Έτσι έχουμε:

$$[D]=1\ \frac{N}{m}=1\ \frac{kg\frac{m}{s^2}}{m}=1\ \frac{kg}{s^2}$$

**A5iii.Λ**

Σύμφωνα με τη σχέση $F_{επαν.}= -Dx$, η γραφική παράσταση είναι της μορφής $y= ax$, άρα ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων, αλλά με αρνητική κλίση $a= -D$.




**A5iv.Σ**

$$\bullet W_{F\varepsilon\pi\alpha\nu.} = -\Delta U = -(\frac{1}{2}Dx_2^2 - \frac{1}{2}Dx_1^2) \xrightarrow{D=k} -(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2)$$

$$\bullet W_{F\varepsilon\lambda\alpha\tau.} = -\Delta U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.} = -(\frac{1}{2}k\Delta\ell_2^2 - \frac{1}{2}k\Delta\ell_1^2)$$

Βλέπουμε ότι οι δύο εκφράσεις είναι διαφορετικές και ταυτίζονται μόνο αν η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας ($x$) ταυτίζεται με την παραμόρφωση του ελατηρίου ($\Delta\ell$) από το φυσικό του μήκος. Γνωρίζουμε ότι κάτι τέτοιο συμβαίνει μόνο αν το ελατήριο είναι οριζόντιο ή όταν δεν υπάρχει βαρύτητα, και όχι γενικά.

*Σημείωση*: για το έργο της δύναμης επαναφοράς στην ΑΑΤ, όπου $F_{επαν.}= ΣF$ ισχύει και το ΘΜΚΕ ($W_{Fεπαν.}= W_{ΣF}= ΔK= K_2-K_1$)

**A5v.Λ**

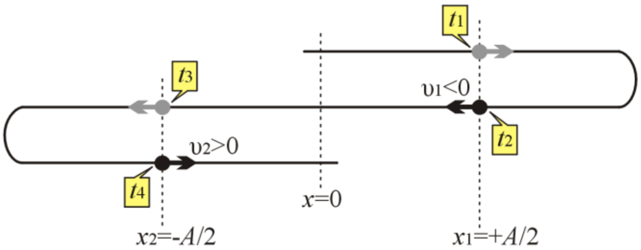
Όταν το σώμα βρίσκεται σε μια ακραία θέση θα έχει ταχύτητα μηδέν. Επομένως οι πιθανές χρονικές στιγμές είναι οι 5 sec και 11 sec. Όμως, αφού το σώμα βρίσκεται στην –Α, αμέσως μετά θα αποκτήσει θετική ταχύτητα, πλησιάζοντας την θέση ισορροπίας του. Βλέπουμε ότι αμέσως μετά τη χρονική στιγμή 11 sec το σώμα αποκτά θετική ταχύτητα. Άρα στη θέση –Α βρίσκεται τη στιγμή 11 sec και προφανώς τη στιγμή 5 sec βρίσκεται στην +Α.

## ΘΕΜΑ Β

**B1. [ii]**

$$\bullet x_1 = +\frac{A}{2} \Rightarrow A\eta\mu\omega t = \frac{A}{2} \Rightarrow \eta\mu\omega t = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{T}t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\kappa=0} \frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{12} \\ \frac{2\pi}{T}t = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\kappa=0} \frac{2\pi}{T}t = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{5T}{12} \end{cases}$$

$$\bullet x_2 = -\frac{A}{2} \Rightarrow A\eta\mu\omega t = -\frac{A}{2} \Rightarrow \eta\mu\omega t = -\frac{1}{2} = -\eta\mu\frac{\pi}{6} = \eta\mu(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{T}t = 2\kappa\pi + (-\frac{\pi}{6}) \xrightarrow{\kappa=1} \frac{2\pi}{T}t = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow t_4 = \frac{11T}{12} \\ \frac{2\pi}{T}t = 2\kappa\pi + \pi - (-\frac{\pi}{6}) \xrightarrow{\kappa=0} \frac{2\pi}{T}t = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow t_3 = \frac{7T}{12} \end{cases}$$



Το χρονικό διάστημα για τη μετακίνηση του σώματος από την x=+A/2 (με υ<0, αφού κινείται προς τη θέση ισορροπίας) μέχρι την x=–A/2 (με υ>0, αφού πάλι κινείται προς την θέση ισορροπίας) είναι:

$$\Delta t = t_4 - t_2 = \frac{11T}{12} - \frac{5T}{12} = \frac{6T}{12} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2}$$

Και το συνολικό διάστημα που έχει διανύσει το σώμα από την $t_2$ έως την $t_4$ είναι (σύμφωνα με το σχήμα):

$$S_{ολ.} = \frac{A}{2} + A + \frac{A}{2} \Rightarrow S_{ολ.} = 2A$$

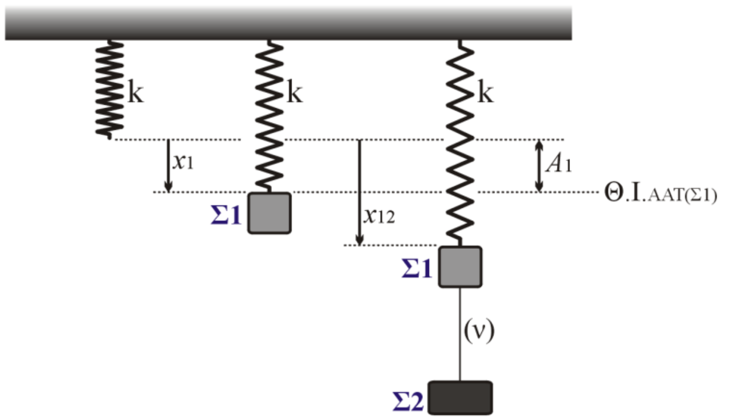
Έτσι η μέση (αριθμητική) ταχύτητα του σώματος για αυτό το διάστημα είναι:

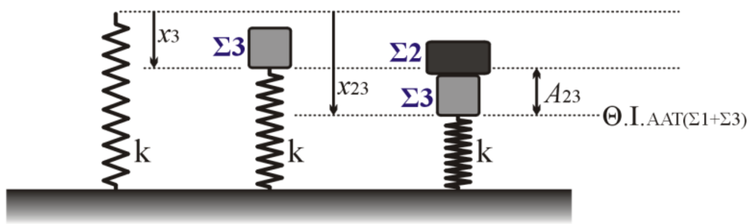
$$\upsilon_\mu = \frac{S_{ολ.}}{\Delta t} = \frac{2A}{T/2} \Rightarrow \upsilon_\mu = \frac{4A}{T} \therefore$$

…σωστό το **(ii)**

---

**B2.** **[i]**




Πάνω Ελατήριο:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma F_1 = 0 \Rightarrow m_1 g = k x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{m_1 g}{k} \\ &\Sigma F_{12} = 0 \Rightarrow (m_1+m_2)g = k x_{12} \Rightarrow x_{12} = \frac{(m_1+m_2)g}{k} \end{aligned}\right\} A_1 = x_{12} - x_1 = \frac{(m_1+m_2)g}{k} - \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow A_1 = \frac{m_2 g}{k}$$

……………………………………………………………………………………………………

Κάτω Ελατήριο:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma F_3 = 0 \Rightarrow m_3 g = k x_3 \Rightarrow x_3 = \frac{m_3 g}{k} \\ &\Sigma F_{23} = 0 \Rightarrow (m_2+m_3)g = k x_{23} \Rightarrow x_{23} = \frac{(m_2+m_3)g}{k} \end{aligned}\right\} A_{23} = x_{23} - x_3 = \frac{(m_2+m_3)g}{k} - \frac{m_3 g}{k} \Rightarrow A_{23} = \frac{m_2 g}{k}$$

……………………………………………………………………………………………………

Βλέπουμε ότι $A_1 = A_{23} = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow \frac{A_1}{A_{23}} = 1 \therefore$ …σωστό το **(i)**

---

**Β3. [i]**

Σύμφωνα με το διάγραμμα των ενεργειών έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = 2A \\ A_2 = A \end{array}\right\} \Rightarrow A_1 = 2A_2 \quad ή \quad A_2 = A_1/2$$

Επίσης, με βάση τις μέγιστες τιμές της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας, που είναι ίσες με τις αντίστοιχες ενέργειες ταλάντωσης, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = E \\ E_2 = E/2 \end{array}\right\} \Rightarrow E_1 = 2E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}D_1A_1^2 = 2\frac{1}{2}D_2A_2^2 \Rightarrow D_1A_1^2 = 2D_2A_2^2 \xrightarrow{A_1=2A_2} D_1 4A_2^2 = 2D_2A_2^2 \Rightarrow D_2 = 2D_1$$

Υπολογίζουμε, στη συνέχεια τις κυκλικές συχνότητες και τις περιόδους:

$$D_2 = 2D_1 \Rightarrow m_2\omega_2^2 = 2m_1\omega_1^2 \xrightarrow{m_1=2m_2} m_2\omega_2^2 = 2\cdot 2m_2\omega_1^2 \Rightarrow \omega_2^2 = 4\omega_1^2 \Rightarrow \omega_2 = 2\omega_1$$

$$\omega_2 = 2\omega_1 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_2} = 2\frac{2\pi}{T_1} \Rightarrow \frac{1}{T_2} = \frac{2}{T_1} \Rightarrow T_1 = 2T_2$$

Τέλος, υπολογίζουμε τις μέγιστες επιταχύνσεις:

$$\left.\begin{array}{l} a_{\max.1} = \omega_1^2 A_1 \\ a_{\max.2} = \omega_2^2 A_2 \xrightarrow{\omega_2=2\omega_1,\ A_2=A_1/2} a_{\max.2} = 4\omega_1^2\,\dfrac{A_1}{2} = 2\omega_1^2 A_1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{\max.2} = 2a_{\max.1}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω στοιχεία το σωστό διάγραμμα είναι στο **Σχήμα I** [...σωστό το **(i)**]:

- Το Σ1 έχει διπλάσια περίοδο από το Σ2, αφού στον ίδιο χρόνο το Σ1 εκτελεί μία ταλάντωση, ενώ το Σ2 εκτελεί δύο.
- Το Σ2 έχει διπλάσια μέγιστη επιτάχυνση ($2a_0$) από το Σ1 (που έχει $a_0$).
- Στην εκφώνηση δεν διευκρινίζεται πουθενά αν τα σώματα Σ1 και Σ2 εκτελούν ταλαντώσεις με ή χωρίς αρχική φάση. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το Σ1 έχει αρχική φάση π/2 rad, ενώ το Σ2 δεν έχει αρχική φάση. Έτσι οι εξισώσεις που περιγράφουν τις επιταχύνσεις τους είναι:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = -a_{\max.1}\,\eta\mu(\omega_1 t + \pi/2) = -a_{\max.1}\,\sigma\upsilon\nu\omega_1 t \\ a_2 = -a_{\max.2}\,\eta\mu\omega_2 t \end{array}\right\} \xrightarrow{a_{\max.2}=2a_{\max.1},\ \omega_2=2\omega_1} \left\{\begin{array}{l} a_1 = -a_{\max.1}\,\sigma\upsilon\nu\omega_1 t = -a_0\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{T_1}t \\ a_2 = -2a_{\max.1}\,\eta\mu 2\omega_1 t = -2a_0\,\eta\mu\dfrac{2\pi}{T_1/2}t \end{array}\right.$$

## ΘΕΜΑ Γ

- $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{200}{2}} = 10\ rad/s$
- $E = \dfrac{1}{2}DA^2 = \dfrac{1}{2}kA^2 \Rightarrow 100 = \dfrac{1}{2}200A^2 \Rightarrow A = 1\ m$
- $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow A = A\eta\mu(\omega 0 + \phi_0) \Rightarrow \eta\mu\phi_0 = 1 = \eta\mu\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \phi_0 = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \xrightarrow{\kappa=0} \dfrac{\pi}{2} \\ \phi_0 = 2\kappa\pi + \pi - \dfrac{\pi}{2} \xrightarrow{\kappa=0} \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \ \ldots\ldots\ \phi_0 = \dfrac{\pi}{2}\ rad$

## Γ1.

$$\bullet\, x = A\eta\mu(\omega t+\phi_0) \Rightarrow x = 1\eta\mu(10t+\frac{\pi}{2}) = 1\sigma\upsilon\nu 10t \;\therefore$$

$$\bullet\, a = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t+\phi_0) = -10^2\cdot 1\eta\mu(10t+\frac{\pi}{2}) \Rightarrow a = -100\eta\mu(10t+\frac{\pi}{2}) = -100\sigma\upsilon\nu 10t \;\therefore$$

---

## Γ2.

$$\bullet\, \upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi_0) = 10\cdot 1\sigma\upsilon\nu(10t+\pi/2) = 10\sigma\upsilon\nu(10t+\pi/2)$$

$$\bullet\, t_1 = \pi/10\ \text{sec}:\ \upsilon_1 = 10\sigma\upsilon\nu(10\pi/10+\pi/2) = 10\sigma\upsilon\nu(\pi+\pi/2) = 10\sigma\upsilon\nu(3\pi/2) = 10\cdot 0 = 0$$

$$\bullet\, p_1 = m\upsilon_1 = 2\cdot 0 = 0 \;\therefore$$

$$\bullet\, \frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx = -kx = -kA\eta\mu(\omega t+\phi_0) = -200\cdot 1\eta\mu(10\pi/10+\frac{\pi}{2}) = -200\eta\mu(3\pi/2) = -200(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} = +200\ N \;\therefore$$

---

## Γ3.

$$\left.\begin{aligned}&\bullet\, x = A\eta\mu(\omega t+\phi_0) \Rightarrow \eta\mu(\omega t+\phi_0) = \frac{x}{A} \Rightarrow \eta\mu^2(\omega t+\phi_0) = \frac{x^2}{A^2}\\ &\bullet\, \upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi_0) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi_0) = \frac{\upsilon}{\omega A} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\phi_0) = \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2}\end{aligned}\right\} \xrightarrow{(+)} 1 = \frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{\omega^2 x^2 + \upsilon^2}{\omega^2 A^2} \Rightarrow \omega^2 x^2 + \upsilon^2 = \omega^2 A^2 \Rightarrow \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2 - \upsilon^2 \Rightarrow x^2 = A^2 - \upsilon^2/\omega^2 \;\therefore\quad \acute{\eta}\quad x = \pm\sqrt{A^2 - \upsilon^2/\omega^2} \;\therefore$$

**2$^{ος}$ τρόπος:**

$$\underline{\text{ΑΔΕΤ}}: E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow DA^2 = m\upsilon^2 + Dx^2 \Rightarrow m\omega^2 A^2 = m\upsilon^2 + m\omega^2 x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 A^2 = \upsilon^2 + \omega^2 x^2 \Rightarrow \omega^2 A^2 - \upsilon^2 = \omega^2 x^2 \Rightarrow x^2 = A^2 - \upsilon^2/\omega^2 \;\therefore\quad \acute{\eta}\quad x = \pm\sqrt{A^2 - \upsilon^2/\omega^2} \;\therefore$$

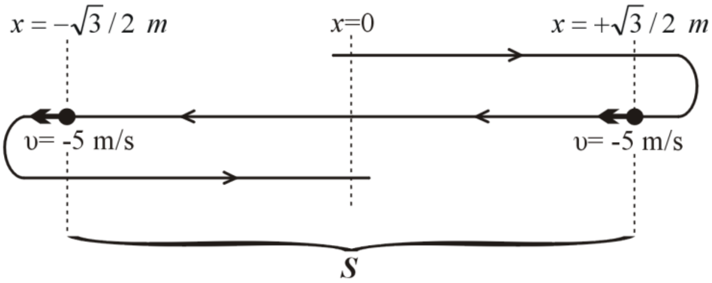
---

## Γ4.

$$x = \pm\sqrt{A^2 - \upsilon^2/\omega^2} \Rightarrow x_2 = \pm\sqrt{A^2 - \upsilon_2^2/\omega^2} = \pm\sqrt{1^2 - (-5)^2/10^2} = \pm\sqrt{1 - 25/100} = \pm\sqrt{1 - 1/4} = \pm\sqrt{3/4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\ m \;\therefore$$

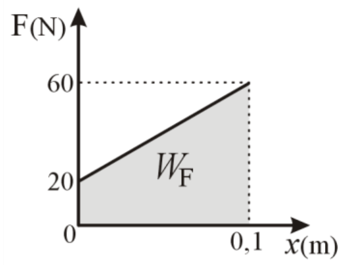
Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα οι δύο θέσεις απέχουν μεταξύ τους $S = 2|x_2| = 2\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = \sqrt{3}\ m \;\therefore$



## ΘΕΜΑ Δ

### Δ1.

Το νήμα σπάει όταν η δύναμη φτάσει στο όριο θραύσης του:




$$F = F_{\theta\rho.} \Rightarrow 400x + 20 = 60 \Rightarrow 400x = 40 \Rightarrow x_{\theta\rho.} = 0{,}1\ m$$

Μέχρι αυτή την απόσταση η δύναμη έχει παράξει έργο:

$$W_F = \text{Ε}\mu\beta = \frac{(\beta + \text{Β})\text{Υ}}{2} = \frac{(20+60)\cdot 0{,}1}{2} \Rightarrow W_F = 4\ J$$

Η ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα ισούται με το έργο της F, άρα: $E_{\pi\rho o\sigma\varphi.} = W_F = 4\ J\ \therefore$

Η ενέργεια αυτή θα μετατραπεί σε ενέργεια ταλάντωσης μετά το σπάσιμο του νήματος, επομένως:

$$E_{\pi\rho o\sigma\varphi.} = E = \frac{1}{2}DA^2 \xrightarrow{D=k=200\,N/m} 4 = \frac{1}{2}200A^2 \Rightarrow A^2 = \frac{4}{100} \Rightarrow A = 0{,}2\ m\ \therefore$$

--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

### Δ2.

Εφόσον το σώμα αρχικά ισορροπούσε, θα βρίσκεται (αρχικά) στη θέση x= 0. Το νήμα σπάει στη θέση $x_{\theta\rho.}$= 0,1 m και εκεί το σώμα έχει ταχύτητα υ. Η ταλάντωση που θα προκύψει θα έχει πλάτος Α= 0,2 m. Με αυτά τα στοιχεία εφαρμόζουμε ΑΔΕΤ:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx_{\theta\rho.}^2 \Rightarrow \frac{1}{2}200\cdot 0{,}2^2 = \frac{1}{2}2\upsilon^2 + \frac{1}{2}200\cdot 0{,}1^2 \Rightarrow 200\cdot 0{,}04 = 2\upsilon^2 + 200\cdot 0{,}01 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 = 2\upsilon^2 + 2 \Rightarrow 6 = 2\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\sqrt{3} \xrightarrow{\theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \varphi o\rho\acute{\alpha}} \upsilon = \sqrt{3}\,m/s$$

Για τους ρυθμούς μεταβολής έχουμε:

$$\bullet \frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F dx}{dt} = \Sigma F\upsilon = -Dx\upsilon = -kx_{\theta\rho.}\upsilon = -200\cdot 0{,}1\sqrt{3} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -20\sqrt{3}\ J/s\ \therefore$$

$$\bullet E = K + U \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} \xrightarrow{E=\sigma\tau\alpha\theta.} 0 = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = +20\sqrt{3}\ J/s\ \therefore$$

--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

### Δ3.

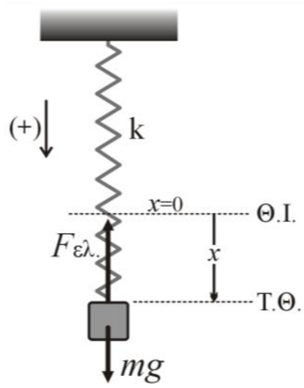
Με θετική φορά την προς τα κάτω και το σώμα να βρίσκεται την $t_0$= 0 στην κάτω ακραία θέση, έχουμε τις αρχικές συνθήκες: **t=0, x= +A, υ=0**, από τις οποίες προκύπτει αρχική φάση **$\phi_0$= π/2 rad**, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow A = A\eta\mu(\omega 0 + \phi_0) \Rightarrow \eta\mu\phi_0 = 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \phi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\kappa=0} \frac{\pi}{2} \\ \phi_0 = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\kappa=0} \frac{\pi}{2} \end{cases} \ \ldots\ldots\ \phi_0 = \frac{\pi}{2}\ rad$$

Για Α= 0,2 m, $\phi_0$= π/2 rad και $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{200/2} = 10\ rad/s$,

η εξίσωση θέσης γίνεται:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow x = 0{,}2\eta\mu(10t + \pi/2) = 0{,}2\sigma\upsilon\nu 10t$$




Συμφωνά με το σχήμα και με θετική φορά την προς τα κάτω έχουμε:

$$\Sigma F = -Dx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda.} + mg = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda.} = -mg - kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda.} = -20 - 200x$$

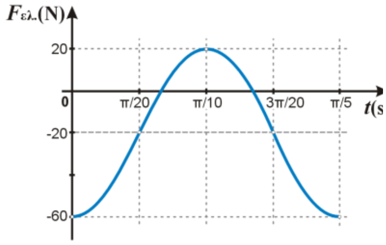
$$\ldots\mu\varepsilon: \ -A \le x \le +A\ \ \acute{\eta}\ \ -0{,}2\,m \le x \le +0{,}2\,m$$

και για $x = 0{,}2\sigma\upsilon\nu 10t$ έχουμε: $F_{\varepsilon\lambda.} = -20 - 200 \cdot 0{,}2\sigma\upsilon\nu 10t \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda.} = -20 - 40\sigma\upsilon\nu 10t$ ∴

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………

<u>*Extra*</u>: η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης είναι:

- της μορφής "-συνωt"
- με πλάτος "40"
- με περίοδο Τ= 2π/ω= 2π/10= π/5 sec
- μετατοπισμένη προς τα κάτω (λόγω του «πλην») κατά "20", δηλαδή: 40→20, 0→-20, -40→-60.




---

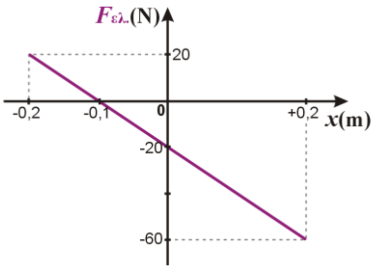
## <u>Δ4.</u>

Σύμφωνα με τα παραπάνω η εξίσωση $F_{\varepsilon\lambda.} = -20 - 200x \;\; (-0{,}2m \le x \le +0{,}2m)$ είναι ευθεία:

$x = -0{,}2 \; m \;\; : \;\; F_{\varepsilon\lambda.} = -20 - 200(-0{,}2) = 20 \; N$

$x = 0 \;\; : \;\; F_{\varepsilon\lambda.} = -20 - 200(0) = -20 \; N$

$x = +0{,}2 \; m \;\; : \;\; F_{\varepsilon\lambda.} = -20 - 200(+0{,}2) = -60 \; N$



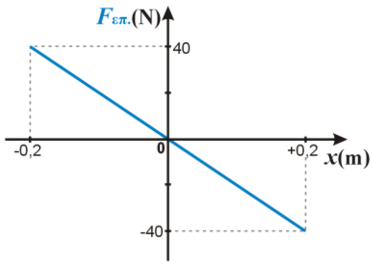

Για τη δύναμη επαναφοράς έχουμε:

$F_{\varepsilon\pi.} = -Dx = -200x \;\; (-0{,}2m \le x \le +0{,}2m)$ και πάλι ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων:

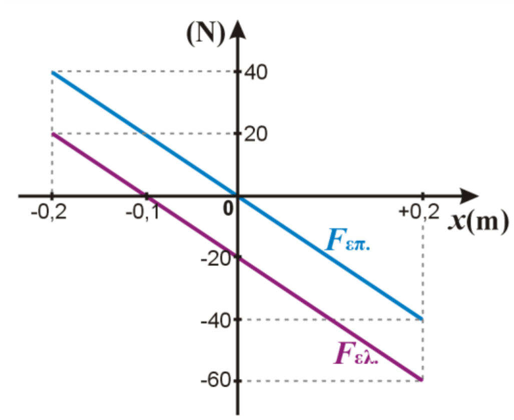
$x = -0{,}2 \; m \;\; : \;\; F_{\varepsilon\pi.} = -200(-0{,}2) = 40 \; N$

$x = 0 \;\; : \;\; F_{\varepsilon\pi.} = -200(0) = 0 \; N$

$x = +0{,}2 \; m \;\; : \;\; F_{\varepsilon\pi.} = -200(+0{,}2) = -40 \; N$

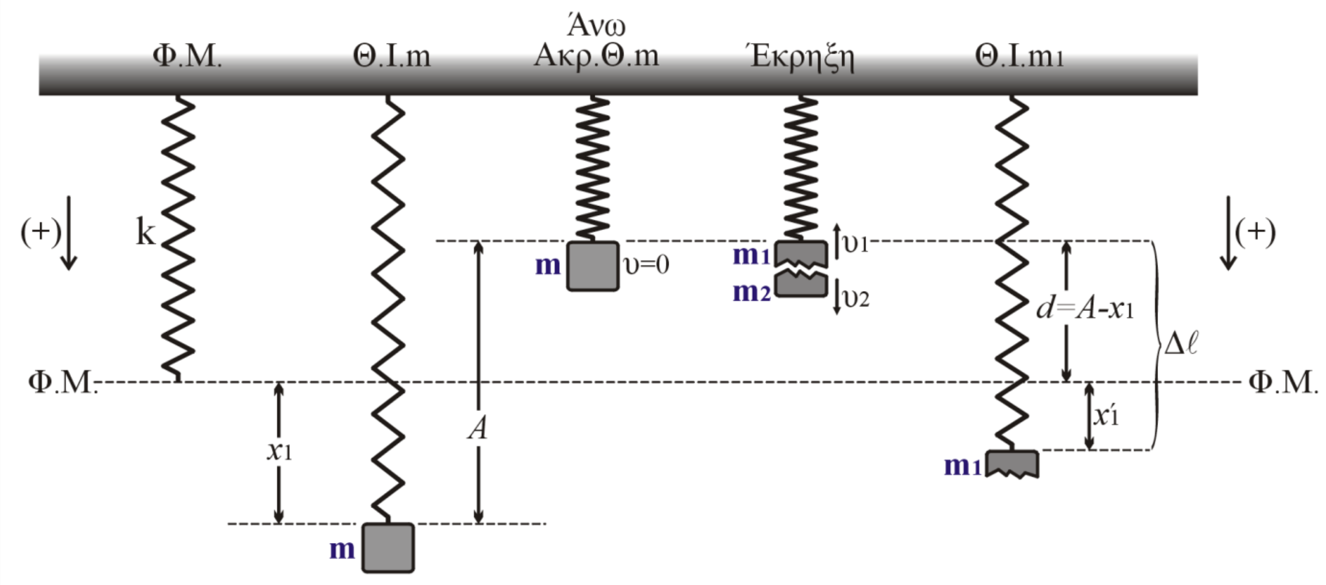



Σε κοινό διάγραμμα οι δύο γραφικές δείχνονται παρακάτω. Πρέπει να προσέξουμε ότι οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, αφού έχουν κοινή κλίση (-200 N/m):




---

**Δ5.**




Θ.Ι.m: $\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = kx_1 \Rightarrow x_1 = \frac{mg}{k} = \frac{20}{200} \Rightarrow x_1 = 0{,}1\ m$

Θ.Ι.m1: $\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1 g = kx_1' \Rightarrow x_1' = \frac{m_1 g}{k} = \frac{10}{200} \Rightarrow x_1' = 0{,}05\ m$

Στο ανώτατο σημείο της ΑΑΤ του m, όπου γίνεται η έκρηξη, η ταχύτητα του m είναι μηδέν (ακραία θέση).

ΑΔΟ: $p_{ολ.} = p'_{ολ.} \Rightarrow 0 = -m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 \Rightarrow m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2 \Rightarrow 1\cdot\upsilon_1 = 1\cdot 1{,}5\sqrt{6} \Rightarrow\Rightarrow \upsilon_1 = 1{,}5\sqrt{6} = \frac{3\sqrt{6}}{2}\ \ m/s$

*Για την ΑΑΤ του* $m_1$ *που θα προκύψει έχουμε*: το $m_1$ βρίσκεται (με ταχύτητα $\upsilon_1 = 3\sqrt{6}/2$ m/s) σε απόσταση $\Delta\ell = d + x'_1$ από τη Θ.Ι.$m_1$ (βλέπε σχήμα), όπου $d = A - x_1$. Άρα:

$$\Delta\ell = A - x_1 + x_1' = 0{,}2 - 0{,}1 + 0{,}05 \Rightarrow \Delta\ell = 0{,}15\ \ m = 3/20\ \ m$$

Εφαρμόζοντας ΑΔΕΤ για την ΑΑΤ του $m_1$ έχουμε:

$$E_1 = K_1 + U_1 \Rightarrow \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 \Rightarrow kA_1^2 = m_1\upsilon_1^2 + k\Delta\ell^2 \Rightarrow 200A_1^2 = 1(\frac{3\sqrt{6}}{2})^2 + 200(\frac{3}{20})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200A_1^2 = \frac{9\cdot 6}{4} + 200\frac{9}{400} = \frac{27}{2} + \frac{9}{2} = \frac{36}{2} = 18 \Rightarrow A_1^2 = \frac{18}{200} = \frac{9}{100} \Rightarrow A_1 = \frac{3}{10} = 0{,}3\ m \therefore$$

.................................................................................................................................

Το σώμα m είναι αρχικά ακίνητο (μηδενική αρχική κινητική ενέργεια στην ανωτάτη θέση) και “σκάει” σε δύο κομμάτια. Το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των δύο κομματιών θα είναι η ενέργεια που απελευθερώνεται κατά την έκρηξη:

$$E_{εκρ.} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}1(\frac{3\sqrt{6}}{2})^2 + \frac{1}{2}1(\frac{3\sqrt{6}}{2})^2 = (\frac{3\sqrt{6}}{2})^2 = \frac{9\cdot 6}{4} \Rightarrow E_{εκρ.} = \frac{27}{2}\ \ J = 13{,}5\ \ J \therefore$$

Επιμέλεια: *Αναστάσιος Νέζης*
http://nezistasos.com/